数理解析研究所講究録
934巻 1996年 167-178

Resolution of Gorenstein Quotient singularities

東大数理科学 伊藤 由佳理 (Yukari Ito)

§0. 目次

§1. Introduction

1.1 取り扱う特異点.

Gorenstein 商特異点 (X, x) とは 局所的に $(\mathbb{C}^n/G, 0)$ と同型な特異点である. ただし、ここで群 G は $SL(n, \mathbb{C})$ の有限部分群である.

(例) A_n型特異点

A_n型特異点は $\mathbb{C}^2$を 巡回群 G で割ったときにできる特異点である. つまり 群 G は $\mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon^{-1})$ (εは 1の原始 $(n+1)$ 乗根) で 生成される. したがって (x, y) を $\mathbb{C}^2$の座標とするとき、群 G の作用は次のようになっている.

$$(x, y) \longmapsto (\varepsilon x, \varepsilon^{-1} y).$$

このとき G-不変式として x^{n+1}, y^{n+1}, xyが とれる. よって群 G による不変式環 Rは

$$\begin{aligned} R = \mathbb{C}[x, y]^G &= \mathbb{C}[x^{n+1}, y^{n+1}, xy] \\ &= \mathbb{C}[X, Y, Z]/(XY - Z^{n+1}) \end{aligned}$$

となる. つまり $X := \mathbb{C}^2/G = \mathrm{Spec}R$は

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0$$

なる方程式で 特徴づけられる 超曲面特異点である.

さらに 特異点は 原点 $(0,0)$ のみの孤立特異点であることも 方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = f = 0$$

を解くことによりわかる.

Gorenstein 商特異点には 2次元、3次元の場合 次のようなものがある.

(1) 2次元の場合

A_n, D_n, E_6, E_7, E_8型特異点のいずれかであり、すべて 孤立超曲面特異点である.

(2) 3次元の場合

$SL(3,\mathbb{C})$ の 有限部分群は 全部で 12 種類ある. 特異点の様子は超曲面でないもの、孤立特異点でないものも多くある.

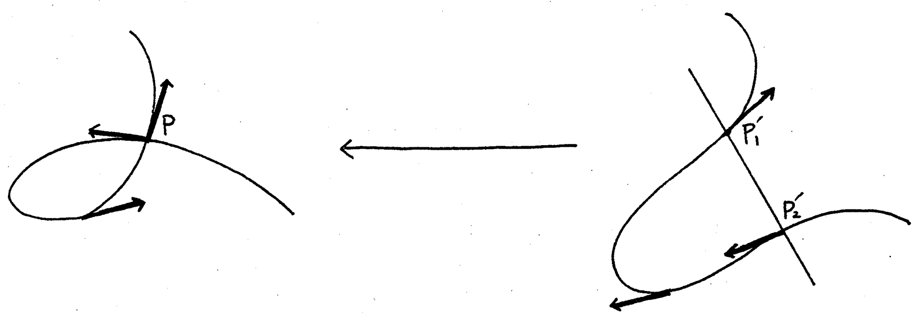
1.2 特異点の解消.

特異点は周りに比べて 尖っていたりするところであるが、それを滑らかな点にする操作が 特異点解消である.

$f : X' \longrightarrow X$が 特異点解消であるとき Xの特異点 p 以外のところは同型のままで $X - \{p\} \cong X' - \{f^{-1}(p)\}$ となっている. また 特異点解消によって 新たに現れるところ $f^{-1}(p)$ を 例外集合という.

1次元の場合を考えてみると 次図のようにもともと接線が2本引けるようなところが特異点である. そこで 各点での接ベクトルが滑らかになるように パラメトライズする操作が 特異点解消にあたる. このとき 新たに出てくるパラメータスペースにあたるところが例外集合である.

これは ジェットコースターの影が 一点に交わっていても 実際には ぶつかっていない ことに似ている！



1.3 分類理論に現れる特異点.

高次元代数多様体の分類理論には canonical singularity 、terminal singularity という特異点が出てくる. ここでは その定義と 2次元、3次元で知られている結果をまとめておく.

定義. Xが *canonical singularity* （または *terminal singularity* ）であるとき以下の性質が成り立つ.

（1）canonical bundle K_Xが $\mathbb{Q}$-Cartier である. つまり 整数数（q）倍して Cartier divisor になる. この qを *index* と呼ぶ.

（2）任意の特異点解消 $f : X' \longrightarrow X$に対しての関係式

$$K_{X'} = f^*K_X + \sum a_iE_i$$

において すべての例外因子 E_iの係数 a_iが 0以上 （または 0より大）である.

定義. 特異点解消 $f : X' \longrightarrow X$が $K_{X'} = f^*K_X$をみたすとき *crepant resolution* である、という.

注意.

1. Crepant resolution は minimal resolution である.

2. Xが terminal singularity のとき crepant resolution は 存在しないが、Xが terminal singularity でないとき crepant resolution があるとは限らない.

事実. 任意次元で *Gorenstein* 商特異点は *index 1* の *canonical singularity* と同じである.

2次元では 次のように完全に分類されている.

$$\text{canonical} \Leftrightarrow A_n, D_n, E_6, E_7, E_8, \text{非特異点}$$

$$\text{terminal} \Leftrightarrow \text{非特異点}$$

しかも Crepant resolution = minimal resolution であることもわかっている.

3次元では 完全に分類されているのは terminal singularity のみである.[Mo] しかし その分類により Gorenstein 商特異点は すべて tereminal でない canonical singularity であることがわかる. したがって crepant resolution が 存在する可能性がある.

その可能性が 物理の事実から 明らかになってきた. 超弦理論で Vafa の公式と呼ばれるものである:

物理的事実. [DHVW] Mを 複素多様体とし、Gが そこに作用する群とする. 商空間 M/G の *canonical bundle* が自明なとき M/G の *crepant resolution* $\widetilde{M/G}$が存在する. さらに $\widetilde{M/G}$の 位相的オイラー数は 次の *orbifold Euler* 数 $\chi(M,G)$ と一致する.

$$\chi(M,G) := \frac{1}{|G|}\sum_{gh=hg}\chi(M^g \cap M^h),$$

ただし、和は 群 G の中の可換な組すべてに対してとる.

この事実をもとに 数学として 次の予想がたてられた.[HH]

予想. 群 G を $SL(3,\mathbb{C})$ の有限部分群とする. $X = \mathbb{C}^3/G$ とするとき、Xの *crepant resolution* $\tilde{X}$が 存在する. さらに$\tilde{X}$のオイラー数は G の共役類の数と一致する.

注意. 代数多様体の分類理論では 与えられた多様体に対して 極小モデルを構成し 分類する. 2次元の場合は 極小モデルは一意的に決まるが、3次元以上は複数個 存在することがわかっている. しかし、上の予想が正しいとすると Xの極小モデルは すべて非特異であることがわかる. また crepant resolution も ひとつの Xに対して 複数個存在するが、オイラー数が不変量となるのは 3次元以下の特殊性である.

§2. Resolution

定理 2.1. *§1 の予想は 正しい！*

この定理の証明の基本となった特異点解消は トーリック幾何学を用いたものであった. そこで まず、toric resolution について 述べる.

2.1 Toric resoution.

アフィントーリック多様体 X_σは

$$N: 格子\ 、M := \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z}): 双対格子$$

に対して

$$N_{\mathbb{R}} \supset \sigma : \mathrm{cone}\ 、\dim_{\mathbb{R}} N_{\mathbb{R}} = n$$

$$M_{\mathbb{R}} \supset \check{\sigma} : \text{dual cone} = \{\xi \in M_{\mathbb{R}} | \langle \xi, x \rangle \leq 0, \forall x \in \sigma\}$$

から決まる 有限生成環 $A_\sigma = \mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M]$ により、$X_\sigma := \mathrm{Spec} A_\sigma$ で与えられる.

定義. Σが 扇（fan）であるとは $N_{\mathbb{R}}$の中の cone の集まりであって、次の 3 つの条件をみたすものをいう.

(a) Σの すべての cone は 頂点を持つ.

(b) τが Σの cone σの 面（face）であるとき、τもまたΣの cone である.

(c) σ 及び σ'が Σの中の cone であるとき、$\sigma \cap \sigma'$は σ 及び σ'の 面である.

定義. このような 扇Σによって定まる トーリック多様体 X_ΣをΣに付随したトーリック多様体という.

以下 トーリック多様体の特異点解消について知られていることをまとめておく.

(1) 特異点解消 $f: X_{\Sigma'} \longrightarrow X_\Sigma$は （射影性を仮定しない場合） $N_{\mathbb{R}}$の中の cone σの単体分割で与えられる. $n = 2, 3$ の場合、crepant resolution になる.

(2) 上の単体分割で新たに生じる頂点は 例外因子にあたる.

(3) X_Σのオイラー数は Σの中にある n 次元 cone の個数と一致する.

2.2 定理 2.1 の証明の概略.

証明はすべて 群 G の分類によるものであり、分類を使わないものはまだ ない.

（1）Abelian （対角行列のみで生成される群） '87 [M1] 、'89 [R1]

トーリック幾何学を用いると、crepant resolution は 三角形の中の格子点を頂点とする三角形分割に対応している.

つまり $g \in G$ に対して $g^r = 1$ とすると 1の原始 r乗根 εを用いて $g = \mathrm{diag}(\varepsilon^a, \varepsilon^b, \varepsilon^c)$ と書ける. この元を $\frac{1}{r}(a.b.c)$ と表すとき、 集合

$$\left\{\frac{1}{r}(a.b.c) \in G, a+b+c=r, 0 \leq a, b, c \leq< r\right\}$$

をΦとおく.

Toric resolution を用いるため、$N := \mathbb{Z}^3 + \sum_{v \in \Phi} \mathbb{Z}v$とすると $N_{\mathbb{R}}$の中の cone は

$$\sigma = \left\{\sum_{i=1}^{3} x_i e^i \in \mathbb{R}^3, x_i \geq 0, \forall i\right\}$$

と書け、$X_\sigma = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M]$ は $X = \mathbb{C}^3/G$ と一致する.

また この場合、crepant resolution は

$$\triangle := \left\{\sum_{i=1}^{3} x_i e^i \in \mathbb{R}^3, \sum_{i=1}^{3} x_i = 1\right\}$$

の単体分割として与えられる.

（2）超曲面特異点 '92 [BM] 、'93 [M2] 、'93 [R2]

'92 年 Bertin 、Markushevich が 具体的に定義方程式を使って blow up をすることにより、特異点解消を構成した. 同様の方法で '93 年に Markushevich が 位数 168 の群、続いて Roan が 位数 60 の群に対して構成した. これにより $SL(3, \mathbb{C})$ の中の単純群すべての場合が解決された.

（3）Monomial （生成元が monomial matrix のみ） '94 [I1],[I2],[I3]

'94 年 trihedral 群に対して構成した方法が monomial 群すべてに有効であることがわかった. この特異点は トーリック特異点でもなく 超曲面特異点とも限らない. 特異点解消では 群 G の可解性を用いた.

ちなみに trihedral 群とは 対角行列と

$$T=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

で 生成される群のことで [I1] にて命名された. この群 G の中の対角行列すべては G の正規部分群 G'をなし、特異点解消は次のように構成される.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \widetilde{X} \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \tau} \\ & & \widetilde{Y} & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & \widetilde{Y}/\mathfrak{A}_3 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} \\ \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3/G'=Y & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{C}^3/G=X \end{array}$$

（4）残りの群に対して '94 [R3]

monomial 群の場合と ほぼ同様に特異点解消が構成できることがわかった.

以上により $SL(3,\mathbb{C})$ のすべての有限部分群に対して crepant resolution が存在することがわかった.

疑問 ?. なぜ crepant resolution の オイラー数 $\chi(\tilde{X})$ は 群 G の共役類の数と一致するのだろうか？

§3. "McKay 対応"

3.1 2次元の McKay 対応.

McKay 対応というのは ひとことで言うと 群 G の表現と $\mathbb{C}^2/G$ の特異点解消の間にある対応のことである. （ここで 群 G は $SL(2,\mathbb{C})$ の有限部分群）

（1）有限群の表現

$G\subset SL(2,\mathbb{C})$ の自明でない既約表現を $\rho_1,\cdots,\rho_k$とする. また G の $SU(2,\mathbb{C})$ への表現を ρとする. このとき、

$$\rho_i\otimes\rho=\sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}\rho_j$$

をみたす α_{ij}が存在する.

ここで $C = [a_{ij}] = 2I_k - [\alpha_{ij}]$ とおくと Cは カルタン行列と呼ばれる行列になっている. この行列は 単純リー環の分類のときに出てきたもので 次の法則にしたがって ディンキン図形を構成することができる.

(1) $a_{i\,j} = -1 \Leftrightarrow$ $\quad i$ ——— j

(2) $a_{i\,j} = 0 \;\Leftrightarrow$ $\quad i \qquad j$

（2）特異点の解消

$\mathbb{C}^2/G$ の極小特異点解消によって出てくる 例外因子の双対グラフは ディンキン図形になる. またさらに カルタン行列の (-1) 倍 $-C$は 例外因子（例外曲線）の交点行列に等しい.

以上のことより 2次元の Gorenstein 商特異点の場合も crepant resolution のオイラー数が 共役類の数と一致していることがわかる.

3.2 "McKay 対応".

以下 簡単のため、1の r乗根を $\varepsilon = \exp(\frac{2\pi i}{r})$ とする.

定義. 群 G が $SL(n, \mathbb{C})$ の有限部分群のとき 任意の元 gは $SL(n, \mathbb{C})$ の中で対角化可能で $g\sim \operatorname{diag}(\varepsilon^{a_1}, \cdots, \varepsilon^{a_n})$ となる. これを

$$\frac{1}{r}(a_1, \cdots, a_n)$$

と書くことにする. このとき

$$\alpha = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

を gの *age* と呼ぶ.

注意. age(id)=0 とする. このとき $0 \le \operatorname{age}(g) < n$ かつ $\operatorname{age}(g)$ は整数. また 元 gと h が群 G の中で共役なら age は 等しくなる.

定理 3.1. [IR] $X = \mathbb{C}^n/G$ とする. Xの任意の特異点解消 X'に対して $\operatorname{age}(g) = 1$ の共役類と X'の中の *crepant divisor* は 1対1対応する.

証明は （1）トーリック幾何学を用いて 巡回群の場合を示し、（2）一般の場合には discrete valuation の分岐理論を用いて 巡回群の場合に帰着させることによって 示される.

この定理は 群の分類によらず、任意の特異点解消に対して成り立つことがポイント！

系 **3.2.** *Crepant resolution* $\tilde{X}$が 存在するとき、*age*$(g)=1$の共役類と 例外因子は 1対1対応する.

さらに3次元の場合、crepant resolution $f:\tilde{X}\longrightarrow X$が存在することより 次が成り立つ.

定理 **3.3.** （3次元 *"McKay* 対応*"*）

age $=0\leftrightarrow H^0(\tilde{X},\mathbb{Q})$,

age $=1\leftrightarrow H^2(\tilde{X},\mathbb{Q})\leftrightarrow\tilde{X}$の中の例外因子,

age $=2\leftrightarrow H^4(\tilde{X},\mathbb{Q})\leftrightarrow f^{-1}(0)$ の中の例外因子.

§4. 例

例 1.

ここでは 定理3.1の応用として得られる2次元の新しいMcKay対応について 解説する. 特に D_4型特異点の場合を見てみる.

D_4型特異点を生じる有限群Gは 次の2つの行列A，Bによって生成される.

$$A=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

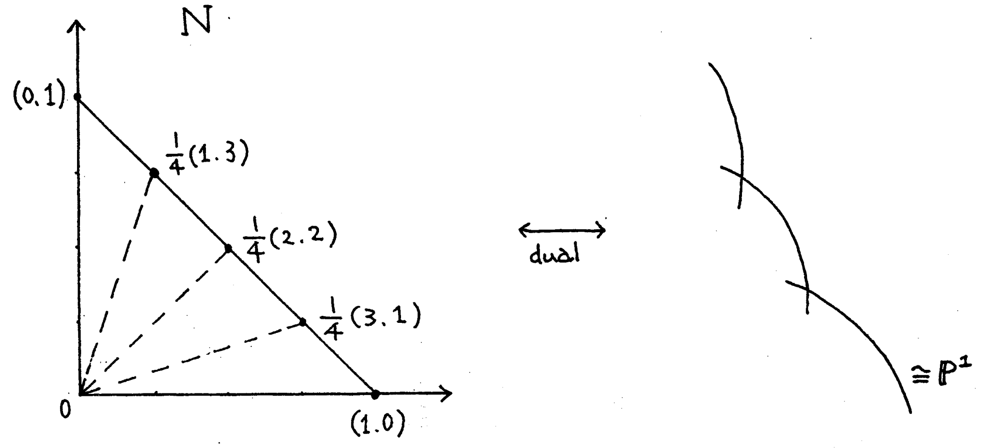
ただし、$i=\sqrt{-1}$とする.

(1) 群Gは 3つの 巡回群を部分群として持っている：

$$\langle A\rangle,\langle B\rangle,\langle AB\rangle.$$

(2) (1) で得られた $\langle g\rangle$ に対して $\mathbb{C}^2/\langle g\rangle$ の toric resolution を 与える.

なお この特異点解消の様子は $\langle A\rangle$ の場合を考えれば 他の場合も同様にわかる.



$$\begin{array}{rccccc} & A & & A^2 & & A^3 \\ \langle A\rangle: & \bigcirc & — & \bigcirc & — & \bigcirc \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} & B & & B^2 & & B^3 \\ \langle B\rangle: & \bigcirc & — & \bigcirc & — & \bigcirc \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} & AB & & (AB)^2 & & (AB)^3 \\ \langle AB\rangle: & \bigcirc & — & \bigcirc & — & \bigcirc \end{array}$$

(3) 更に 群 G の中で 各元の関係をみると、

$$A \sim A^3,\ B \sim B^3,\ AB \sim BA$$

が成り立つ.

(4) 定理 3.1 より 共役ならば 同じ例外因子に対応することがわかる. したがって例外集合の様子は D_4型のディンキン図形として得られる.

$$\begin{array}{ccccc} A & & -1 & & B \\ \bigcirc & — & \bigcirc & — & \bigcirc \\ & & | & & \\ & AB & \bigcirc & & \end{array}$$

例 2 （**Trihedral 群**).

Trihedral 群は 対角行列で生成される群 $H \subset SL(3,\mathbb{C})$ と

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で 生成される. 群 Hは ひとつ以上の対角行列

$$A_i = \frac{1}{r_i}(a_i, b_i, c_i), \qquad a_i + b_i + c_i = r_i$$

で 生成されており、これは通常 $A_i = \mathrm{diag}(\varepsilon^{a_i}, \varepsilon^{b_i}, \varepsilon^{c_i})$ と書かれ εは 1の原始 r_i乗根である. 更に $H \triangleleft G$.

この群による商特異点が trihedral singularity であるが、その特異点解消については [I1,2] で構成された.

ここでは 特に $H = \langle \frac{1}{3}(0,1,2), \frac{1}{3}(1,2,0), \frac{1}{3}(2,0,1) \rangle$ の場合をみる. 明らかに $G = \langle \frac{1}{3}(0,1,2), T \rangle$ は 位数 27 の群である.

G は age 2 の元として ただひとつ$\frac{1}{3}(2,2,2)$ を持ち、あと 25 個の age 1 の元を持つ. $SL(3,\mathbb{C})$ の部分群に対して 非孤立特異点を与える元は すべて age が 1 の元である. したがって いまの場合、age=1 の元の集合 Γ_1は

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{3}(1,1,1), \ \frac{1}{3}(0,1,2), \ \frac{1}{3}(1,2,0), \ \frac{1}{3}(2,0,1), \\ \frac{1}{3}(0,2,1), \ \frac{1}{3}(2,1,0), \ \frac{1}{3}(1,0,2) \end{matrix} \right\} \cup HT \cup HT^2$$

G の中の 共役関係より

$$\frac{1}{3}(a,b,c) \sim \frac{1}{3}(b,c,a), \quad \forall a,b,c \in \{0,1,2\},$$

かつ

$$T \sim \frac{1}{3}(a,b,c)T, \quad と \quad T^2 \sim \frac{1}{3}(a,b,c)T^2 \quad \forall a \neq b.$$

このように crepant resolution $\tilde{X} \longrightarrow X = \mathbb{C}^3/G$ の例外因子は 次の age=1 の 共役類と 1 体 1 対応している：

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{3}(0,1,2), \ \tfrac{1}{3}(0,2,1), \ \tfrac{1}{3}(1,1,1), \\ T, \ \tfrac{1}{3}(1,1,1)T, \ \tfrac{1}{3}(2,2,2)T, \\ T^2, \ \tfrac{1}{3}(1,1,1)T^2, \ \tfrac{1}{3}(2,2,2)T^2. \end{gathered}$$

これらの元は $H^2(\tilde{X},\mathbb{Q})$ の基底と対応しているので $h^2(\tilde{X},\mathbb{Q}) = 9$. 一方 定理 3.3 より $H^4(\tilde{X},\mathbb{Q})$ の基底は$\Gamma_2 = \{\frac{1}{3}(2,2,2)\}$ と対応している. この Poincaré 双対 $H^2_c(tildeX,\mathbb{Q})$ は$\Gamma_1^{(0)} = \{\frac{1}{3}(1,1,1)\}$ に対応する基底を持っている. 特に オイラー数 $\chi(\tilde{X})$ は

$$\begin{aligned} \chi(\tilde{X}) &= h^0(\tilde{X},\mathbb{Q}) + h^2(\tilde{X},\mathbb{Q}) + h^4(\tilde{X},\mathbb{Q}) = 1 + 9 + 1 = 11 \\ &= \sharp\{\text{conjugacy class in } G\}. \end{aligned}$$

References

[BM] J. Bertin and D. Markshevich, *Singularités quotients non abéliennes de dimension 3 et variétés de Bogomolov*, Prépublication de l'Institut Fourier **n.216** (1992).

[DHVW] L. Dixon, J. Harvey, C. Vafa and E. Witten, *Strings on orbifolds (I)*, Nucl. Phys. **B261** (1985), 678–686.

[HH] F. Hirzebruch and T. Höfer, *On the Euler number of an orbifold*, Math. Ann. **286** (1990), 255–260.

[I1] Y. Ito, *Crepant resolutions of trihedral singularities*, Proc. Japan Acad. **70** (1994), 131–136.

[I2] ———, *Crepant resolution of trihedral singularities and the orbifold Euler characteristic*, Internat. J. Math. **6** (1995), 33–43.

[I3] ———, *Gorenstein quotient singularities of monomial type in dimension three*, Jour. Math. Sci. Univ. Tokyo (to appear) (alg-geom/9406001).

[IR] Y. Ito and M. Reid, *The McKay correspondence for finite subgroups of $SL(3, \mathbb{C})$*, Higher Dimensional Complex Varieties Proc. Internat. Conference, Trento (1994) (to appear) (alg-geom/9411010).

[M2] D. Markushevich, *Resolution of $\mathbb{C}^3/H_{168}$*, preprint.

[M1] D. G. Markushevich, M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov, *Description of a class of superstring compactifications related to semi-simple Lie algebras*, Comm. Math. Phys. **111** (1987), 247–274.

[Mo] S. Mori, *On 3-dimensional terminal singularities*, Nagoya Math. J. **98** (1985), 43–66.

[R1] S. S. Roan, *On the generalization of Kummer surfaces*, J. Diff. Geometry **30** (1989), 523–537.

[R2] ———, *On $c_1 = 0$ resolution of quotient singularity*, preprint.

[R3] ———, *Minimal resolutions of Gorenstein orbifolds in dimension three*, Preprint R940606-1, Acad. Sinica, Taibei, Jun 1994.